COMITATO NAZIONALE PER L'ENERGIA NUCLEARE
Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-62/113

G. Barbiellini e G. Bologna: CALCOLI DI SEZIONI D'URTO PER PRODUZIONE DI COPPIE DA FOTONI LINEARMENTE POLARIZZATI, IN CRISTALLI.

Nota interna: n. 113
20 Dicembre 1962.

Servizio Documentazione
dei Laboratori Nazionali di Frascati del CNEN
Casella Postale 70 - Frascati (Roma)

Laboratori Nazionali di Frascati del C.N.E.N.
Servizio Documentazione

LNF-62/113

Nota interna: n° 113
20 Dicembre 1962

G. Barbiellini e G. Bologna: CALCOLI DI SEZIONI D'URTO PER PRODUZIONE DI COPPIE DA FOTONI LINEARMENTE POLARIZZATI, IN CRISTALLI.

1. Introduzione

In un recente lavoro(1) è stato proposto un nuovo metodo per la misura della polarizzazione lineare di un fascio di fotoni di alta energia ($\gtrsim$ 1 GeV). Questo metodo si basa sul fatto che la sezione d'urto, differenziale in energia, per produzione di coppie di elettroni in cristalli, da fotoni linearmente polarizzati, dipende dall'angolo formato dal piano di polarizzazione del fascio di fotoni con un piano connesso intrinsecamente col cristallo convertitore. Ruotando il cristallo in modo opportuno è così possibile ottenere un'asimmetria nella produzione di coppie. Si può risalire al valore della polarizzazione se si conoscono i valori delle sezioni d'urto per produzione di coppie relativamente a due direzioni diverse della polarizzazione. I risultati dei calcoli di queste sezioni d'urto sono già stati dati nel lavoro citato(1); tali calcoli furono effettuati dagli autori seguendo due diversi metodi che conducono allo stesso risultato. Nel presente lavoro esporremo uno di tali metodi, che é del tutto simile a quello seguito in un'altra nota(2).

2. La Sezione d'Urto Differenziale

Nel seguito, a meno che non venga detto il contrario, misureremo le energie in unità $mc^2 = 0.510$ MeV (energia di riposo dell'elettrone), gli impulsi in unità mc e le lunghezze in unità $\lambda\!\!\!^{-}_c$, essendo $\lambda_c = 2\pi\lambda\!\!\!^{-}_c = h/mc = 0.0243$ Å la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone. In approssimazione di Born, la sezione d'urto differenziale per produzione di coppie di elettroni nel campo di un nucleo da fotoni linearmente polarizzati nella direzione $\vec{\varepsilon} \perp \vec{k}$ è stata calcolata da May(3) e nelle approssimazioni di alte energie e piccoli angoli, in cui ci porremo sempre nel seguito, si scrive

$$
\begin{aligned}
d^5\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2}\frac{1}{(p^2+q^2)^2}\frac{E_+E_-}{k^3}\Big\{-4\Big[\frac{2E_+^2E_-\theta_+\cos\psi_+}{1+E_+^2\theta_+^2} + \\
(1) \qquad + \frac{2E_+E_-^2\theta_-\cos\psi_-}{1+E_-^2\theta_-^2}\Big]^2 + 4k^2E_+E_-\frac{E_+^2\theta_+^2+E_-^2\theta_-^2+2E_+E_-\theta_+\theta_-\cos(\psi_+-\psi_-)}{(1+E_+^2\theta_+^2)(1+E_-^2\theta_-^2)}\Big\}\cdot \\
\cdot\,\theta_+d\theta_+d\phi_+\,\theta_-d\theta_-d\phi_-\,dE_+
\end{aligned}
$$

in cui

$\bar{\sigma} = Z^2(e^2/mc^2)^2/137 = 0.579 \cdot 10^{-27}\ Z^2\ \mathrm{cm}^2$

Z = Numero atomico

$\beta = 111\, Z^{-1/3}$ raggio di schermo

$k, \vec{k};\ E_+, \vec{p}_+;\ E_-, \vec{p}_-;$ energia ed impulso del fotone primario, del positrone e dell'elettrone prodotto, rispettivamente.

$\vec{q} = \vec{k} - \vec{p}_+ - \vec{p}_-;$ Impulso di rinculo del nucleo. Indicheremo con q_z e $q_\perp$ rispettivamente la sua componente parallela e perpendicolare a $\vec{k}$.

$\theta_+ = \sphericalangle\, \vec{p}_+, \vec{k};\ \theta_- = \sphericalangle\, \vec{p}_-, \vec{k};$ angoli di emissione rispettivamente del positrone e dell'elettrone rispetto al fotone primario.

$\varphi_+ = \sphericalangle\, (\vec{p}_+, \vec{k})(\vec{b}_1, \vec{k});\ \varphi_- = \sphericalangle\, (\vec{p}_-, \vec{k})(\vec{b}_1, \vec{k});$ rispettivamente azimut del positrone e dell'elettrone prodotto rispetto al piano dei vettori $\vec{b}_1, \vec{k}$, essendo, per ora, $\vec{b}_1$ un vettore arbitrario.

$\psi_+ = \sphericalangle\, (\vec{p}_+, \vec{k})(\vec{\varepsilon}, \vec{k});\quad \psi_- = \sphericalangle\, (\vec{p}_-, \vec{k})(\vec{\varepsilon}, \vec{k})$

$\phi = \phi_+ - \phi_- = \psi_+ - \psi_- = (\vec{p}_+ \vec{k})(\vec{p}_-, \vec{k})$ angolo diedro fra il positrone e l'elettrone, con costola in $\vec{k}$.

Per il seguito ci sarà utile definire anche i seguenti angoli:

$\gamma = \sphericalangle(\vec{p}_+,\vec{k}),(\vec{q},\vec{k})$ angolo diedro fra la direzione del positrone e l'impulso di rinculo del nucleo, con costola in $\vec{k}$.

$\psi = \phi_+ - \gamma = \sphericalangle(\vec{q},\vec{k})(\vec{b}_1,\vec{k})$ azimut dell'impulso di rinculo del nucleo rispetto al piano $(\vec{b}_1,\vec{k})$, con costola in $\vec{k}$.

Tutti gli angoli diedri definiti si intendono orientati.

Le sezioni d'urto differenziali per produzione di coppie di elettroni nel campo di un nucleo da fotoni polarizzati parallelamente o perpendicolarmente al piano $(\vec{q},\vec{k})$ sono date rispettivamente da:

$$d^5\sigma_{\parallel \vec{q}\vec{k}} = d^5\sigma(\varphi_+ = \gamma\,;\ \varphi_- = \gamma - \phi) =$$

oppure $$= d^5\sigma(\varphi_+ = \gamma \pm \pi\,;\ \varphi_- = \gamma - \phi \pm \pi)$$

$$d^5\sigma_{\perp \vec{q}\vec{k}} = d^5\sigma(\varphi_+ = \gamma \pm \tfrac{\pi}{2}\,,\ \varphi_- = \gamma - \phi \pm \tfrac{\pi}{2}).$$

Ponendo

$$\begin{cases} u = \theta_+ E_+ \\ v = \theta_- E_- \end{cases}$$

e tenendo presente che

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{v}{q_\perp} \operatorname{sen} \phi$$

$$\cos \gamma = \frac{u + v\cos\phi}{q_\perp}$$

si ottiene

$$d^5\sigma_{\parallel,\perp}\,\vec{q}\,k = \frac{\sigma}{4\pi^2}\,\frac{1}{(\beta^{-2}+q^2)}\,\frac{uv}{k^3}\,F_{\parallel,\perp}(u,v,\phi,q_\perp^2)\,\cdot \tag{2}$$

$$\cdot\, d\theta_+\, d\theta_-\, d\phi_+\, d\phi_-\, dE_+ \,,$$

avendo posto

$$\left\{\begin{aligned} F_\parallel(u,v,\phi,q_\perp^2) &= -\frac{16E_+^2E_-^2}{q_\perp^2}\left[\pm\frac{u(u+v\cos\phi)}{1+u^2} \pm \frac{v(v+u\cos\phi)}{1+v^2}\right]^2 + \\ &+ \frac{4k^2E_+E_-(u^2+v^2+2uv\cos\phi)}{(1+u^2)(1+v^2)} \\ F_\perp(u,v,\phi,q_\perp^2) &= -\frac{16E_+^2E_-^2}{q_\perp^2}\left[\pm\frac{1}{1+u^2} \mp \frac{1}{1+v^2}\right]^2 u^2v^2\sin^2\phi + \\ &+ \frac{4k^2E_+E_-(u^2+v^2+2uv\cos\phi)}{(1+u^2)(1+v^2)} \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Le (3) dipendono dalle quattro variabili $u, v, \phi, q_\perp^2$; per quello che vedremo in seguito è conveniente introdurre le variabili, u q_z, $q_\perp^2$ e φ ; si possono eliminare v e ϕ mediante le relazioni (4)

$$\left\{\begin{aligned} v^2 &= 2E_-(q_z-\delta) - \frac{E_-}{E_+}u^2 \\ uv\cos\phi &= \frac{1}{2}\left[q_\perp^2 - 2E_-(q_z-\delta) + \left(\frac{E_-}{E_+}-1\right)u^2\right] \\ q_\perp^2 &= u^2+v^2+2uv\cos\phi \end{aligned}\right. \tag{4}$$

essendo

$$\delta = \frac{k}{2E_+E_-} \tag{5}$$

il minimo impulso trasferibile al nucleo.

Si ottiene così

$$(6)\quad \begin{cases} F_{\parallel}(x, q_z, q_\perp^2) = -\left\{ \dfrac{4E_+^2E_-^2k^2}{q_\perp^2}\left[\pm\dfrac{1}{E_+(x+a)} \pm \dfrac{1}{E_-(x+b)}\right]^2 (l^2-x^2) + \pm\dfrac{4k^4q_\perp^2}{(x+a)(x+b)}\right\} \\ F_\perp(x, q_z, q_\perp^2) = -\left\{ \dfrac{4E_+^2E_-^2k^2}{q_\perp^2}\left[\pm\dfrac{x+c}{E_+(x+a)} \pm \dfrac{x+d}{E_-(x+b)}\right]^2 + \dfrac{4k^4q_\perp^2}{(x+a)(x+b)}\right\} \end{cases}$$

avendo posto

$$(7)\quad \begin{cases} x = \dfrac{k}{E_+}u^2 - 2E_-(q_z-\delta) - q_\perp^2\dfrac{E_+-E_-}{k} \\ a = 2E_-\left[q_z - \dfrac{q_\perp^2}{2k}\dfrac{(E_--E_+)}{E_-}\right]; \qquad c = \dfrac{2E_+}{k}q_\perp^2 \\ b = -2E_+\left[q_z - \dfrac{q_\perp^2}{2k}\dfrac{(E_+-E_-)}{E_+}\right]; \quad d = -\dfrac{2E_-}{k}q_\perp^2 \\ l^2 = \dfrac{4q_\perp^2}{\delta}\left[\left(q_z - \dfrac{q_\perp^2}{2k}\right) - \delta\right] \geq 0 \end{cases}$$

Nell'ultima delle (7) l^2 è realmente un numero positivo o nullo, per ragioni cinematiche.

Si devono ora esprimere gli elementi differenziali della (2) mediante le nuove variabili. Si ottiene

$$(8)\qquad d\vartheta_+ d\vartheta_- d\phi_+ d\phi_- dE_+ = \frac{dx\, dq_z\, dq_\perp^2\, d\varphi\, dE_+}{2k u v (l^2-x^2)^{1/2}},$$

alla quale si deve imporre la condizione di realtà della radice:

$$-|l| \leq x \leq |l|.$$

Quindi, per le (2), (6), (8) si ha:

$$d^5\bar{\sigma}_{\parallel,\perp\,\vec{q}\vec{k}} = -\frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2}\frac{1}{(\delta^2+q^2)}\frac{2E_+^2E_-^2}{k^2q_\perp^2}f_{\parallel,\perp}(x,q_z,q_\perp^2)\,dx\,dq_z\,dq_\perp^2\,d\varphi\,dE_+ , \tag{9}$$

avendo posto

$$\begin{cases} f_\parallel(x,q_z,q_\perp^2) = \left[\pm\frac{x+c}{E_+(x+a)} \pm \frac{x+d}{E_-(x+b)}\right]^2\frac{1}{(\ell^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{k^2q_\perp^4}{E_+^2E_-^2(x+a)(x+b)(\ell^2-x^2)^{1/2}} \\ f_\perp(x,q_z,q_\perp^2) = \left[\mp\frac{1}{E_+(x+a)} \pm \frac{1}{E_-(x+b)}\right]^2(\ell^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{k^2q_\perp^4}{E_+^2E_-^2(x+a)(x+b)(\ell^2-x^2)^{1/2}} \end{cases} \tag{10}$$

Per il seguito ci sarà utile integrare $f_{\parallel,\perp}(x,q_z,q_\perp^2)$ rispetto ad x. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-|\ell|}^{|\ell|} f_\parallel(x,q_z,q_\perp^2)\,dx = \pi\Big\{ & 4\delta^2 + \frac{E_+^2}{E_-^2}\,\frac{q_z - q_\perp^2[(E_+-E_-)/2kE_+)]}{[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{3/2}} + \\ & + \frac{E_-^2}{E_+^2}\,\frac{q_z - q_\perp^2[(E_--E_+)/2kE_-]}{[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{3/2}} - \frac{2E_+}{E_-^2[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}} - \frac{2E_-}{E_+^2[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{1/2}} - \\ & - \frac{2[q_z-(q_\perp^4/4E_+^2q_z)]}{kE_-[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}} - \frac{2[q_z-(q_\perp^4/4E_-^2q_z)]}{kE_+[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{1/2}} - \\ & - \frac{kq_\perp^4}{4E_+^2E_-^2q_z}\left[\frac{1}{E_+[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}} + \frac{1}{E_-[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{1/2}}\right]\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \int_{-|\ell|}^{|\ell|} f_\perp(x,q_z,q_\perp^2)\,dx = \pi\Big\{ & -4\delta^2 + \frac{q_z - q_\perp^2[(E_+-E_-)/2kE_+)]}{E_-^2[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}} + \\ & + \frac{q_z - q_\perp[(E_--E_+)/2kE_-]}{E_+^2[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2]^{1/2}} + \frac{2[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}}{kE_-q_z} + \frac{2[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{1/2}}{kE_+q_z} - \\ & - \frac{kq_\perp^4}{4E_+^2E_-^2q_z}\left[\frac{1}{E_+[E_+^2+(q_\perp^2/E_+^2)]^{1/2}} + \frac{1}{E_-[E_-^2+(q_\perp^2/E_-^2)]^{1/2}}\right]\Big\} \end{aligned} \tag{12}$$

3. Le Sezioni d'Urto in Cristalli

Per ottenere le sezioni d'urto per produzione di coppie di elettroni, differenziali in energia, da fotoni linearmente polarizzati, in cristalli, si tratta[4] di moltiplicare le (9) per il fattore interferenziale del cristallo ed integrare su quattro variabili.

Nelle (9) la polarizzazione dei fotoni primari è riferita ad un piano variabile nell'integrazione, mentre è necessario assumere un piano fisso. Conviene evidentemente scegliere un piano connesso intrinsecamente col cristallo e perciò considereremo le sezioni d'urto $d^5\sigma_{\parallel,\perp}$ da fotoni aventi polarizzazione rispettivamente parallela e perpendicolare al piano individuato da un asse dello spazio reticolare inverso e da $\vec{k}$. Prendendo il vettore arbitrario $\vec{b}_1$ definito al § 2 parallelo ad un tale asse si ottiene:

$$(15)\qquad \begin{cases} d^5\sigma_{\parallel} - d^5\sigma_{\perp} = (d^5\sigma_{\parallel\vec{q}\vec{k}} - d^5\sigma_{\perp\vec{q}\vec{k}})\cos 2\varphi \\[2ex] d^5\sigma_{\parallel} + d^5\sigma_{\perp} = d^5\sigma_{\parallel\vec{q}\vec{k}} + d^5\sigma_{\perp\vec{q}\vec{k}} \end{cases}$$

Adottando le notazioni del rif. bibl. (1), il fattore interferenziale si scrive[2]

$$(16)\qquad D = \frac{(2\pi)^3}{\Delta} N_0 \sum_{\vec{g}} e^{-Aq^2} |S|^2 \delta(\vec{q}-\vec{g}) + N(1-e^{-Aq^2}),$$

dove $\delta(\vec{q}-\vec{g})$ rappresenta la funzione di Dirac dell'ar gomento vettoriale $\vec{q} - \vec{g}$:

$$\delta(\vec{q} - \vec{g}) = \delta(q_1 - g_1)\,\delta(q_2 - g_2)\,\delta(q_3 - g_3)$$

essendo q_j e g_j $(j = 1,2,3)$ le proiezioni di $\vec{q}$ e del generico vettore del reticolo inverso $\vec{g}$ sugli assi del sistema di riferimento $\vec{b}_j$.

Le quantità che ci interessa calcolare per definire il rapporto di asimmetria di rif. bibl. (1) sono

$$d\sigma_{\parallel} - d\sigma_{\perp} = \int D\,(d^5\sigma_{\parallel} - d^5\sigma_{\perp}) =$$

$$= -\frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2}\,\frac{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2\,d\varepsilon_+}{k^2}\iint\Big[\frac{(2\pi)^3}{\Delta}N_0\sum_{\vec{g}} e^{-Aq^2}|S|^2\,\delta(\vec{q}-\vec{g}) + \tag{17}$$

$$+ N(1-e^{-Aq^2})\Big]\,\frac{[f_{\parallel}(x,q_2,q_{\perp}^2) - f_{\perp}(x,q_2,q_{\perp}^2)]}{(\beta^{-2}+q^2)^2}\cos 2\varphi\,dx\,dq_2\,dq_{\perp}^2\,d\varphi$$

$$d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp} = \int D\,(d^5\sigma_{\parallel} + d^5\sigma_{\perp}) =$$

$$= \frac{\bar{\sigma}}{4\pi^2}\,\frac{2\varepsilon_+^2\varepsilon_-^2\,d\varepsilon_+}{k^2}\iint\Big[\frac{(2\pi)^3}{\Delta}N_0\sum_{\vec{g}} e^{-Aq^2}|S|^2\,\delta(\vec{q}-\vec{g}) + \tag{18}$$

$$+ N(1-e^{-Aq^2})\Big]\,\frac{[f_{\parallel}(x,q_2,q_{\perp}^2) + f_{\perp}(x,q_2,q_{\perp}^2)]}{(\beta^{-2}+q^2)^2}\,dx\,dq_2\,dq_{\perp}^2\,d\varphi$$

Il secondo termine della (16) dà luogo ad un contributo incoerente che è nullo nella (17), come si vede immediatamente integrando rispetto a φ da 0 a π.

Il contributo incoerente nella (18) è già stato calcolato da Überall[4,5].

L'integrazione rispetto ad x è già stata effettuata (fr. le (14)). Rimangono da eseguire le integrazioni rispetto a q_z, $q_\perp^2$ e φ.

Si ottiene

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\dfrac{d\sigma_\parallel - d\sigma_\perp}{N\bar{\sigma}\,dy} = 2y(1-y)\Psi_3 \\[2ex]
\dfrac{d\sigma_\parallel + d\sigma_\perp}{N\bar{\sigma}\,dy} = \left[y^2+(1-y)^2\right]\left[\Psi_1+\Psi_1^c\right] + \frac{2}{3}y(1-y)\left[\Psi_2+\Psi_2^c\right]
\end{cases}
$$

avendo posto $y = \frac{E_+}{k}$

$$
(20)\quad
\begin{cases}
\Psi_1 = \dfrac{(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\displaystyle\sum_{g_1g_2g_3}|S|^2\int\frac{e^{-Aq^2}}{(\beta^{-2}+q^2)^2}\,\frac{\delta^2 q_\perp^2}{q_z^2}\,\delta(\vec{q}-\vec{g})\,dq_z\,dq_\perp^2\,d\varphi \\[3ex]
\Psi_2 = \dfrac{(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\displaystyle\sum_{g_1g_2g_3}|S|^2\int\frac{e^{-Aq^2}}{(\beta^{-2}+q^2)^2}\,\frac{6\delta^2 q_\perp^2(q_z-\delta)}{q_z^4}\,\delta(\vec{q}-\vec{g})\,dq_z\,dq_\perp^2\,d\varphi \\[3ex]
\Psi_3 = -\dfrac{(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\displaystyle\sum_{g_1g_2g_3}|S|^2\int\frac{e^{-Aq^2}}{(\beta^{-2}+q^2)^2}\,\frac{\delta^3 q_\perp^2}{q_z^4}\,(2\cos^2\varphi-1)\,\delta(\vec{q}-\vec{g})\,dq_z\,dq_\perp^2\,d\varphi
\end{cases}
$$

Queste espressioni sono formalmente identiche alle (16) di rif. bibl. (2).

Le funzioni $\Psi_{1,2}^c$ nelle (19) rappresentano il contributo incoerente di cui più sopra e sono già state date in rif. bibl. (2).

La costante A ha valori dell'ordine di $100\div200$[4].

E' per questa ragione che nel § 2 abbiamo assunto $q \lesssim 0.1$, in quanto valori maggiori danno un contributo trascurabile nelle (20), a causa della presenza del fattore exp $(-Aq^2)$.

Le componenti q_j di $\vec{q}$ si esprimono facilmente mediante le variabili q_z, $q_\perp$, φ .

Sia $\vartheta = \sphericalangle(\vec{k}, \vec{b}_1)$ l'angolo formato dal fotone primario con l'asse $\vec{b}_1$. Tale angolo è sempre molto piccolo ($\lesssim 0.1$ rad); sia $\alpha = \sphericalangle(\vec{k}, \vec{b}_1)(\vec{b}_2, \vec{b}_1)$ l'angolo diedro formato dai piani $(\vec{k}, \vec{b}_1)$ e $(\vec{b}_2, \vec{b}_1)$. Si ottengono (cfr. appendice) le seguenti relazioni approssimate, valide quando ϑ e δ tendono a zero

$$(21)\quad \begin{cases} q_z = g_1 + \vartheta(g_2 \cos\alpha + g_3 \operatorname{sen}\alpha) \\ q_\perp^2 = g_2^2 + g_3^2 \\ \cos\varphi = \dfrac{g_2\cos\alpha + g_3 \operatorname{sen}\alpha}{g_\perp} \end{cases}$$

Si può effettuare ora un cambiamento delle variabili negli argomenti delle funzioni di Dirac che compaiono nelle (20). In modo analogo a quanto visto in rif. bibl. (2) si può scrivere:

$$\delta[q_1-g_1]\,\delta[q_2-g_2]\,\delta[q_3-g_3] = 4\delta\left[q_z-\vartheta(g_2\cos\alpha + g_3\operatorname{sen}\alpha)-g_1\right]\delta\left[q_\perp^2-(g_2^2+g_3^2)\right]\delta\left[\varphi-\cos^{-1}\left(\frac{g_2\cos\alpha+g_3\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{g_2^2+g_3^2}}\right)\right],$$

Con ciò le integrazioni su q_z, $q_\perp$ e φ si effettuano immediatamente operando nelle (20) le sostituzioni

$$\begin{cases} q_z \longrightarrow g_1 + \vartheta(g_2\cos\alpha + g_3\operatorname{sen}\alpha) \\ q_\perp^2 \longrightarrow g_2^2 + g_3^2\ ; \qquad \cos\varphi \longrightarrow \dfrac{g_2\cos\alpha + g_3\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{g_2^2+g_3^2}} \end{cases}$$

e moltiplicando il risultato per 4.

Poiché $q_{\perp}^{2}$ si può confondere con $q^{2(4)}$, si ottiene

$$
(22)\quad \begin{cases}
\psi_1(\theta,\delta) = \dfrac{4(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\,\delta \displaystyle\sum_{g_1g_2g_3} |S|^2 \dfrac{e^{-Ag^2}}{(\beta^{-2}+g^2)^2}\,\dfrac{g_2^2+g_3^2}{[g_1+(g_2\cos\alpha+g_3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\theta]^2} \\[2ex]
\psi_2(\theta,\delta) = \dfrac{24(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\,\delta \displaystyle\sum^{2}_{g_1g_2g_3} |S|^2 \dfrac{e^{-Ag^2}}{(\beta^{-2}+g^2)^2}\,\dfrac{(g_2^2+g_3^2)[g_1+(g_2\cos\alpha+g_3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\theta-\delta]}{[g_1+(g_2\cos\alpha+g_3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\theta]^4} \\[2ex]
\psi_3(\theta,\delta) = -\dfrac{4(2\pi)^2}{\Delta}\dfrac{N_0}{N}\,\delta \displaystyle\sum^{3}_{g_1g_2g_3} |S|^2 \dfrac{e^{-Ag^2}}{(\beta^{-2}+g^2)^2}\,\dfrac{(g_2^2+g_3^2)\cos 2\alpha+2g_2g_3\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{[g_1+(g_2\cos\alpha+g_3\,\mathrm{sen}\,\alpha)\theta]^4}
\end{cases},
$$

Le somme triple in queste formule devono esser fatte rispettando la condizione cinematica espressa dall'ultima delle (7), che ora, trascurando $q_{\perp}^{2}/2k$ rispetto a q_z, diventa

$$
g_1+\theta(g_2\cos\alpha+g_3\,\mathrm{sen}\,\alpha) \geq \delta
$$

Si comprende ora la ragione per la quale abbiamo introdotto le variabili q_z, $q_{\perp}^{2}$ e φ : infatti mediante queste variabili si sono potuti esprimere gli argomenti delle funzioni di Dirac e così l'integrazione si è potuta effettuare in modo molto semplice.

Le (19) e (22) sono le formule già pubblicate. Rimandiamo al rif. bibl. (1) per altre considerazioni.

Ringraziamo il Sig. G. Tonna per l'aiuto datoci nei calcoli algebrici e numerici.

Appendice

Vogliamo vedere come sono state ottenute le (21).

Nell'approssimazione di alte energie e piccoli angoli, tenendo presente il simbolismo di § 2, si ottiene successivamente

$$q_1 = \vec{q}\cdot\vec{b}_1 = \vec{k}\cdot\vec{b}_1 - \vec{p}_+\cdot\vec{b}_1 - \vec{p}_-\cdot\vec{b}_1 = k\cos\theta - p_+\cos(p_+,b_1) - p_-\cos(p_-,b_1) =$$

$$= \delta - \tfrac{1}{2}\{k\theta^2 - p_+[\theta_+^2 + \theta^2 - 2\theta_+\theta\cos\phi_+] - p_-[\theta_-^2 + \theta^2 - 2\theta_-\theta\cos\phi_-]\} =$$

$$= \delta - \frac{\theta^2}{2}\delta + \frac{u^2}{2E_+} + \frac{v^2}{2E_-} - \theta(u\cos\phi_+ + v\cos\phi_-) \simeq$$

$$\simeq q_2 - \theta(u\cos\phi_+ + v\cos\phi_-) = q_2 - \theta[u\cos\phi_+ + v\cos(\phi_+ - \phi)] =$$

$$= q_2 - \theta[(u + v\cos\phi)\cos\phi_+ + v\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\phi_+] =$$

$$= q_2 - \theta q_\perp\cos(\phi_+ - \delta) = q_2 - \theta q_\perp\cos\psi \quad .$$

In quanto precede è stato trascurato $\theta^2/2$ rispetto ad 1 e si sono tenute presenti le relazioni cinematiche di Überall[4].

Si ha poi

$$\cos(k\,b_2) = \cos(k\,b_1)\cos(b_2 b_1) + \mathrm{sen}(k\,b_1)\,\mathrm{sen}(b_2 b_1)\cos[(k b_1)(b_2 b_1)] =$$

$$= \theta\cos\alpha$$

$$\cos(k\,b_3) = \theta\cos[(k b_1)(b_2 b_1) + (b_2 b_1)(b_3 b_1) - 2\pi] = \theta\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \theta\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Inoltre

$$\cos(p_\pm b_2) = \cos(p_\pm k)\cos(b_2 k) + \mathrm{sen}(p_\pm k)\,\mathrm{sen}(b_2 k)\cdot$$

$$\cdot\cos[(p_\pm k)(b_2 k)] = \theta\cos\alpha + \theta_\pm\cos[(p_\pm k)(b_2 k)]$$

Ma si ha

$$(p_\pm k)(b_2 k) = 2\pi + (p_\pm k)(b_1 k) + (b_1 k)(b_2 k)$$

$$\cos(b_1 b_2) = 0 = \cos(b_1 k)\cos(b_2 k) + \mathrm{sen}(b_1 k)\,\mathrm{sen}(b_2 k)\cdot$$

$$\cdot \cos[(b_1 k)(b_2 k)] = \theta\,\{\cos\alpha + \cos[(b_1 k)(b_2 k)]\}$$

$$\frac{\mathrm{sen}(b_1 b_2)}{\mathrm{sen}[(b_1 k)(b_2 k)]} = \frac{\mathrm{sen}(k b_2)}{\mathrm{sen}[(k b_1)(b_2 b_1)]}$$

e quindi

$$(b_1 k)(b_2 k) = \pi - \alpha$$

$$(p_\pm k)(b_2 k) = 2\pi + \phi_\pm + \pi - \alpha \doteq \pi + \phi_\pm - \alpha$$

$$\cos(p_\pm b_2) = \theta \cos\alpha - \theta_\pm \cos(\phi_\pm - \alpha)$$

Sia ha poi

$$(b_3 b_1)(k b_1) + (k b_1)(b_2 b_1) + (b_2 b_1)(b_3 b_1) = 2\pi$$

$$(k b_1)(b_3 b_1) = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

e quindi, analogamente a sopra

$$(b_1 k)(b_3 k) = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

$$(p_\pm k)(b_3 k) = -2\pi + \phi_\pm + \frac{3\pi}{2} - \alpha = \phi_\pm - \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(p_\pm b_3) = \theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \theta_\pm\,\mathrm{sen}(\phi_\pm - \alpha)$$

Si ottiene quindi in definitiva

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \vec{q}\cdot\vec{b}_2 = \vec{k}\cdot\vec{b}_2 - \vec{p}_+\cdot\vec{b}_2 - \vec{p}_-\cdot\vec{b}_2 = k\theta\cos\alpha - p_+\left[\theta\cos\alpha - \right.\\
&\quad \left. - \theta_+\cos(\phi_+-\alpha)\right] - p_-\left[\theta\cos\alpha - \theta_-\cos(\phi_--\alpha)\right] = \\
&= \theta\delta\cos\alpha + u\cos(\phi_+-\alpha) + v\cos(\phi_--\alpha) \simeq \\
&\simeq u\cos(\phi_+-\alpha) + v\cos(\phi_+-\phi-\alpha) = \\
&= (u+v\cos\phi)\cos(\phi_+-\alpha) + v\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}(\phi_+-\alpha) = \\
&= q_\perp\cos(\phi_+-\gamma-\alpha) = q_\perp\cos(\varphi-\alpha)
\end{aligned}
$$

Analogamente si ottiene

$$
\begin{aligned}
q_3 &= \theta\delta\,\mathrm{sen}\,\alpha - u\,\mathrm{sen}(\phi_+-\alpha) - v\,\mathrm{sen}(\phi_--\alpha) \simeq \\
&\simeq -\left\{(u+v\cos\phi)\,\mathrm{sen}(\phi_+-\alpha) - v\,\mathrm{sen}\,\phi\cos(\phi_+-\alpha)\right\} = \\
&= -q_\perp\,\mathrm{sen}(\varphi-\alpha) \,,
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$
\begin{cases}
q_1 = q_z - \theta q_\perp \cos\varphi \\
q_2 = q_\perp \cos(\varphi-\alpha) \\
q_3 = -q_\perp\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\alpha)
\end{cases}
$$

dalle quali si ottengono subito le (21)

Bibliografia

1) G. Barbiellini, G. Bologna, G. Diambrini and G.P. Murtas, Laboratori Nazionali di Frascati LNF-62/107 (Dicembre 1962)

2) G. Bologna, Laboratori Nazionali di Frascati LNF-62/56 (20 Giugno 1962)

3) M. May, Phys. Rev. 84, 265 (1951)

4) H. Überall, Phys. Rev. 103, 1055 (1956)

5) H. Überall, Phys. Rev. 107, 223 (1957)